بهبود روش اجزای محدود بسط‌یافته در آنالیز مسائل ترک با تولید مجدد شبکه*

کامران مدبر(۱) حمید مسلمی(۲)

چکیده روش اجزای محدود بسط‌یافته یکی از تکنیک‌های بسیار مؤثر برای مدل‌سازی مسائل دارای ترک می‌باشد. در این روش باتوجه به استفاده از توابع غنی‌سازی برای مدل‌کردن ناپیوستگی میدان جابه‌جایی، دیگر ترک به‌صورت یک ماهیت هندسی مدل نمی‌شود و نیازی نمی‌باشد که شبکهٔ اجزای محدود در هر مرحله مسیر ترک را دنبال کند. ولی مشکل اساسی در این روش عدم کنترل برروی میزان خطای حل عددی می‌باشد. به این منظور به‌کمک روش تولید مجدد شبکهٔ تطابقی، در مواردی که خطای حل بیش از حد قابل قبول است، شبکهٔ اجزای محدود مجددا تولید می‌شود و مسئله با شبکهٔ جدید حل می‌شود تا بتوان به دقت مطلوب دست یافت. این تولید مجدد شبکه کاملا مستقل از دنبال کردن مسیر ترک می‌باشد و ممکن است در چند مرحله از رشد ترک، مسئله با یک شبکهٔ یکسان حل شود. الگوریتم ذکرشده باعث می‌شود که بدون مشکلات دنبال کردن مسیر ترک، دقت حل نیز در حد مطلوبی باقی بماند. پارامتر ضریب شدت تنش که نقش کلیدی در تعیین مسیر رشد ترک دارد، با کمک روش ترکیبی محاسبه شده‌است و بهبود قابل توجهی در دقت محاسبهٔ عددی این پارامتر مشاهده شده‌است.

واژه‌های کلیدی اجزای محدود بسط‌یافته، آنالیز مسائل ترک، اجزای محدود تطابقی، توابع غنی‌سازی، اصلاح مش.

Improving the Extended Finite Element Method in the Crack Problems via the Remeshing Process

K. Modabber H. Moslemi

Abstract Challenging and complex nature of the numerical analysis of crack problems have attracted the interest of many researchers in past decades and several techniques have been proposed for these problems. One of these techniques is the extended finite element method in which the crack tip field modeling is improved by enrichment of shape functions and the crack can intersect the elements. On the other hand, we have adaptive finite element method which aims to improve the accuracy of displacement and stress fields near the crack tip by remeshing process. Researchers have reported the drawbacks of each of these two techniques. In this paper the drawbacks of the previous techniques are covered with proper combination of these two techniques. By this combination the crack can pass through the elements and there is no need for crack tracking by mesh. In addition the estimated error is limited to desirable bands and stress intensity factor can be computed numerically with acceptable accuracy.

Keywords Extended Finite Element Method; Crack Problems; Adaptive Finite Element Method; Enrichment functions, Remeshing.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۹/۵ تاریخ پذیرش آن ۹٦/٤/۱۷ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد سازه، مهندسی عمران، دانشگاه شاهد، تهران.

(۲)نویسنده مسئول: استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران. Email: h.moslemi@shahed.ac.ir

مقدمه

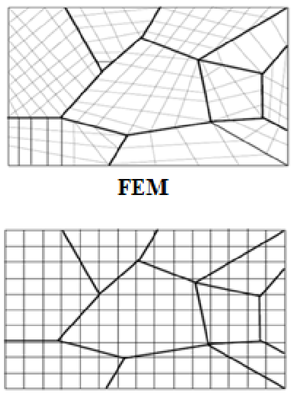
حل مسائل ترک به‌دلیل وجود ناپیوستگی در میدان جابه‌جایی و تکین بودن میدان تنش در نوک ترک همواره جزو مسائل چالش‌برانگیز در رشته‌های مختلف مهندسی بوده‌است. به‌خصوص در استفاده از روش‌های عددی، روش‌هایی که در مسائل بدون ترک به‌خوبی جواب مسئله را مدل می‌کنند، در مسائل دارای ترک جواب‌های واگرا و کاملا دور از جواب تحلیلی مسئله را می‌دهند. بنابراین برای بهبود روش‌های عددی در تحلیل مسائل ترک تکنیک‌های مختلفی توسط محققان مختلف پیشنهاد گشته‌است. یکی از این تکنیک‌ها روش اجزای محدود بسط‌یافته می‌باشد که ایدۀ اصلی این روش برمبنای اصل تقسیم‌بندی جزء واحد است که توسط بابوشکا و ملنک ارائه گردید[1].

به‌موازات این روش، تکنیک اجزای محدود تطابقی یا همان روش اصلاح مش برای مدل‌سازی دقیق رفتار مسائل دارای ترک مورداستفاده قرار گرفته‌است. این روش نیز سعی دارد با ارائۀ اصلاح شبکه، خطاهای ایجاد شده را که تحت تأثیر نحوۀ شبکه‌بندی می‌باشند کاهش دهد.

روش اجزای محدود بسط‌یافته یکی از تکنیک‌های موفق درزمینۀ آنالیز مسائل ترک می‌باشد. مهم‌ترین مزیتی که این روش نسبت به روش اجزای محدود معمولی دارد این است که دیگر نیازی به مش‌بندی مجدد در مسئله به هنگام رشد ترک نیست. در مسائلی که بااستفاده از روش اجزای محدود معمولی آنالیز می‌شوند در هر مرحله از رشد ترک هندسۀ مسئله کاملا تغییر می‌یابد چرا که بایستی خود ترک در این مسائل مستقیما مدل گردد و همین موضوع باعث برهم خوردن هندسۀ مسئله درزمانی می‌شود که ترک رشد می‌کند [2].

اما در روش اجزای محدود بسط‌یافته با تغییر توابع شکل و افزودن جملاتی به معادلۀ جابه‌جایی، ترک یا ناپیوستگی مدل می‌شود و نیازی به مش‌بندی مجدد در هر مرحله از رشد ترک وجود ندارد. شکل (۱) تفاوت مش‌بندی در دو روش اجزای محدود معمولی و بسط‌یافته را به تصویر می‌کشد[3].

برای مدل‌سازی ناپیوستگی در میدان جابه‌جایی ترک از افزودن جملاتی به تابع جابه‌جایی در روش اجزای محدود کلاسیک استفاده می‌شود. این جملات توابع غنی‌سازی نام دارند. توابع غنی‌سازی مورداستفاده در روش اجزای محدود بسط‌یافته به دو دسته تقسیم می‌شوند. دستۀ اول توابع برای مدل‌سازی المان‌هایی می‌باشد که ترک از آنها عبور کرده‌است و دستۀ دوم برای المان‌هایی می‌باشد که نوک ترک در آنها واقع شده‌است.



شکل ۱ تطبیق و عدم تطبیق مش‌بندی در دو روش اجزای محدود کلاسیک و بسط‌یافته

بلیچکو [4] برای ترک الاستیک و برای مسائل ایزوتروپ رابطۀ (۱) را به‌عنوان رابطۀ نهایی برای غنی‌سازی معرفی کرده‌است.

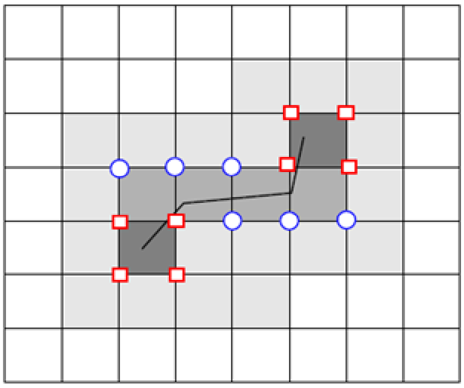
$$U = \sum_{i \in N} N_i(x) U_i + \sum_{i \in N_{cut}} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in N_{front}} \sum_{\alpha} N_i(x) B_\alpha(x) b_{i,\alpha} \quad (۱)$$

در روابط فوق N مجموعۀ نقاط موجود در روش اجزای محدود استاندارد می‌باشد. N_{cut} مجموعۀ نقاطی هستند که ترک از المان‌های آنها عبور کرده‌است و دراصطلاح آنها را بریده‌است. این نقاط در شکل (۲) با دایره مشخص شده‌است. N_{front} مجموعۀ نقاطی است که

نوک ترک در المان‌های آنها قرار گرفته‌است این نقاط نیز در شکل (۲) با علامت مربع مشخص گردیده‌است[3].

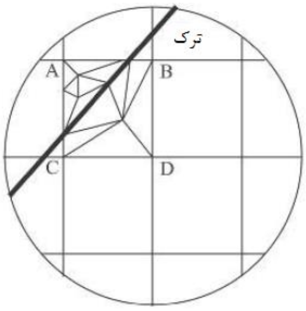
همچنین در رابطهٔ (۱) N_i توابع شکل استاندارد در روش اجزای معمولی استاندارد می‌باشد. H نیز تابع پرش هویساید می‌باشد. تابع هویساید در نقاط بالای ترک مقدار ۱+ و در نقاط پایین ترک مقدار ۱− را به خود می‌گیرد. تابع B_α نیز از حل تحلیلی الاستیک نوک ترک نشئت گرفته‌است و به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$[B_\alpha]=[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta] \quad (۲)$$



شکل ۲ نقاط تحت تأثیر توابع عادی غنی‌سازی و توابع نوک ترک

به‌دلیل وجود ناپیوستگی توابع هویساید که در ماتریس شکل ایجاد می‌گردند، انتگرال‌گیری به‌روش‌های عادی، نظیر استفاده از روش گاوس کارساز نیست و دقت لازم در انتگرال‌گیری وجود ندارد. در این خصوص روش‌های متعددی پیشنهاد شده‌است که یکی از آنها روش پیشنهادی دالبو می‌باشد. در این روش المانی که از آن ترک عبور کرده‌است به زیر المان‌های مثلثی تقسیم می‌شود و انتگرال‌گیری براساس این زیرالمان‌ها محاسبه می‌گردد. شکل (۳) نمونه‌ای از تقسیم‌بندی این زیرالمان‌ها را به‌تصویر می‌کشد[۵].



شکل ۳ زیرالمان مثلثی منطقهٔ ترک

البته در المان‌هایی که منطقهٔ المان‌های معمول را به المان‌های غنی‌شده مرتبط می‌سازند و به آنها المان‌های مخلوط (Blending Elements) گفته می‌شود، مشکلاتی در همگرایی جواب‌ها مشاهده می‌شود که این مشکلات را می‌توان با اصلاح توابع غنی‌سازی کاهش داد. به این‌صورت که توابع غنی‌سازی در المان‌های استاندارد صفر می‌شوند، در المان‌هایی که همهٔ گره‌های آنها غنی‌سازی می‌شوند، بدون تغییر می‌مانند و در المان‌های مخلوط به‌صورت پیوسته تغییر می‌کنند.

روش اجزای محدود تطابقی

روش اجزای محدود تطابقی به‌عنوان یک تکنیک موفق در آنالیز مسائل ترک به کار می‌رود. اساس کار این روش اصلاح مش و معرفی مش‌بندی مناسب براساس شرایط و نوع مسئله می‌باشد. اصولا در مسائلی که ترک وجود دارد به‌دلیل تمرکز بالای تنش در اطراف نوک ترک خطا در آن محدوده زیاد می‌باشد و لذا پاسخ مسئله به‌خصوص فاکتور شدت تنش خطای نسبتا بالایی خواهد داشت و با مقدار تحلیلی خود فاصله دارد. بر همین اساس روش اجزای محدود تطابقی با اصلاح مش و یافتن نقاط حساس مسئله که نیاز به ریزسازی بیشتر دارند، مقدار خطای مسئله را کاهش می‌دهد و درنتیجه جواب‌ها به مقدار تحلیلی آن نزدیک‌تر می‌گردد. معمولا از دو نوع رویکرد برای اصلاح مش در روش اجزای محدود تطابقی استفاده می‌شود: ۱– روش‌های مبتنی بر باقی‌مانده‌ها

(Residual Based Methods) و ۲- روش‌های مبتنی بر بهبود جواب‌ها (Recovery Based Methods). در روش‌های مبتنی بر باقی‌مانده‌ها که درابتدا توسط بابوشکا و رینبولت ارائه گردید[6]، نتایج حل به‌روش اجزای محدود در معادلات حاکم بر سیستم قرار داده می‌شود و خطا به‌صورت نرم انرژی و با محاسبهٔ باقی‌مانده‌های محلی این معادلات برروی مجموعه‌ای از المان‌ها (patch) محاسبه می‌شود. از سوی دیگر در روش‌های مبتنی بر بهبود جواب که نخستین بار توسط زینکوویچ و ژو ارائه گردید، از یک فرایند بازیابی اطلاعات استفاده می‌شود تا مقادیر دقیق‌تری برای متغیرها به‌دست آید[7]. در این مقاله از این نوع رویکرد برای اصلاح مش استفاده شده‌است.

در این روش برای ارزیابی خطا، بایستی از میزان اختلافی که بین جواب‌های بهبودیافته و جواب‌های قبلی وجود دارد استفاده می‌گردد. برای این کار ابتدا مسئله را با همان مش‌بندی اولیه آنالیز می‌کنیم. برای بهبود جواب‌ها کافیست بااستفاده از روابط توابع شکلی جواب بهبود یافته را محاسبه نماییم. این رابطه به‌صورت زیر بیان خواهد شد[۸].

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \qquad (۳)$$

که σ^* تنش بهبودیافته، تابع N شکل و $\bar{\sigma}^*$ مقادیر تنش در گره‌ها می‌باشد.

از آن‌جایی‌که جواب‌های بهبود یافته دارای تقریب مناسبتری نسبت به جواب‌های واقعی مسئله می‌باشد، لذا می توان از اختلاف دو جواب به‌عنوان خطای تقریب مسئله استفاده نمود.

$$e_\sigma \approx \sigma^* - \hat{\sigma} \qquad (٤)$$

$\hat{\sigma}$ جواب روش اجزای محدود در گره‌ها می‌باشد. تعریف فوق مقدار خطای برآوردشده را در تک‌تک نقاط دامنه می‌دهد، ولی برای ریزسازی شبکه معیار مناسبی نمی‌باشد، چرا که ممکن است در یک نقطهٔ خاص مثل نوک ترک تنش به‌سمت بی‌نهایت برود که خطا در این نقطه بسیار بالا خواهد بود، ولی درمجموع خطای کل جواب قابل قبول باشد. ازاین‌رو به‌جای خطای نقطه‌به‌نقطه نرم خطا تعریف می‌شود که به‌صورت انتگرال عددی از تابع خطا روی دامنه است. یکی از معروف‌ترین نرم‌های خطا، نرم L_2 می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\|e\| = \left(\int_\Omega e^T e\, d\Omega\right)^{1/2} \qquad (۵)$$

به این ترتیب نرم تابع خطای تنش برابر خواهد بود با:

$$\|e_\sigma\| = \|\sigma^* - \hat{\sigma}\| = \left(\int_\Omega (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega\right)^{1/2} \qquad (٦)$$

پس از تخمین خطای مسئله می‌توان یک شبکهٔ بهینه برمبنای خطای برآوردشده ایجاد نمود. بدین ترتیب که در نقاط با خطای بالاتر المان‌های ریزتر و در مناطق با خطای پایین از المان‌های درشت‌تر استفاده نمود. با تعریف یک خطای هدف مطلوب $\left(\|e_\sigma\|_i\right)_{aim}$ می‌توان تراکم المان‌های متصل به گره‌های مختلف را تعیین نمود و شبکهٔ جدید را تعیین نمود.

$$\left(h_i\right)_{new} = \left[\frac{\left(\|e_\sigma\|_i\right)_{aim}}{\|e_\sigma\|_i}\right]\left(h_i\right)_{old} \qquad (٧)$$

برآورد فاکتور شدت تنش با ترکیب روش اجزای محدود بسط‌یافته و تطابقی

پارامتر فاکتور شدت برای بیان میزان تمرکز تنش در اطراف نوک ترک به‌کار می‌رود و نقش تعیین‌کننده‌ای در مسیر رشد ترک دارد. مفهوم فاکتور شدت تنش برای اولین‌بار توسط اروین در سال ۱۹۵۷ برای سنجش مقدار تکینگی استفاده شد[9]. برای محاسبهٔ فاکتور شدت تنش به‌صورت تحلیلی بایستی از روابط الاستیک موجود استفاده نمود که تنها برای الگوها و مسائل خاص حل شده‌است و در سایر مسائل عموما از روش‌های عددی برای برآورد ضریب شدت تنش استفاده می‌شود. از روش‌های متداول عددی برای برآورد این ضریب می‌توان به‌روش همبستگی تغییرمکان‌ها (Displacment

Correlation Method)، روش گسترش ترک مجازی (Virtual crack extension method)، روش انتگرال بستهٔ ترک اصلاح‌شده (Modified crack closure integral)، روش J–انتگرال، روش انتگرال متقابل (Interaction integral method) اشاره داشت[2]. در این مقاله از روش انتگرال متقابل برای برآورد ضریب شدت تنش استفاده شده‌است.

روش انتگرال متقابل یکی از دقیق‌ترین روش‌ها برای محاسبهٔ فاکتور شدت تنش می‌باشد. این روش به‌نوعی روش J انتگرال را ارتقا می‌دهد و بااستفاده از یک میدان کمکی می‌تواند پارامتر J را به‌دقت و به‌سادگی محاسبه نماید.

انتگرال اندرکنش متقابل M برای اجسام الاستیک توسط پائولینو در سال ۲۰۰٤ ارائه گردید[10]. مزیتی که این روش نسبت به سایر روش‌ها دارد این است که هم‌زمان و با یک انتگرال‌گیری پارامتر فاکتور شدت تنش در هر دو مود محاسبه می‌گردد. در این روش بایستی یک فضای کمکی متأثر از تنش و کرنش در مسئله تعریف نمود. این فضای کمکی به‌نحوی در مسئله تعیین می‌گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی بدون نیرو برروی سطح ترک در منطقهٔ A^* را ارضا نماید. A^* مساحت معادلی است که در آن انتگرال گرفته می‌شود. در این روش انتگرال J از ترکیب انتگرال مسئلهٔ اصلی و مسئلهٔ کمکی و انتگرال اندرکنش به‌دست می‌آید:

$$J = J^{act} + J^{aux} + M \quad (۸)$$

جملات J^{act} و J^{aux} مربوط به وضعیت واقعی و کمکی است و M نیز انتگرال متقابل می‌باشد که مقدار آن برابر است با:

$$M = \int_{A^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W^M \delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Gamma \quad (۹)$$

برای ارتباط انتگرال اندرکنش و ضریب شدت تنش از تعریف ضریب زیر استفاده می‌شود[10].

$$M = \frac{2}{E'}(K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (۱۰)$$

برای مد I، $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ قرار می‌گیرد و برای مد II، $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ قرار می‌گیرد؛ بنابراین:

$$K = \frac{E'}{2} M \quad (۱۱)$$

به‌جای E' برای حالت کرنش مسطح از $E/(1-\nu^2)$ و برای تنش مسطح نیز از E استفاده می‌شود.

در این برآورد مدل‌سازی ترک با روش اجزای محدود بسط‌یافته صورت می‌گیرد و هندسهٔ ترک از میان المان‌ها عبور می‌کند. پس از برآورد تنش‌ها و پیش از محاسبهٔ ضریب شدت تنش، خطای دامنه به‌روش اجزای محدود تطابقی تخمین زده می‌شود و درصورتی‌که خطای دامنه بیش از محدوده قابل‌قبول باشد، شبکه با روش ارائه‌شده در بند (۲) مجدد تولید می‌شود و آنالیز شبکه مجدد انجام می‌گیرد. در تمامی این مراحل مسیر ترک می‌تواند از بین المان‌ها عبور نماید. زمانی‌که خطای تخمین زده‌شده در حد قابل قبول رسید، می‌توان بااستفاده از روش انتگرال متقابل، ضریب شدت تنش را محاسبه نمود. با این ترکیب دیگر نیازی به دنبال کردن مسیر ترک توسط المان‌ها نیست و همچنین برآورد ضریب شدت تنش برمبنای تنش‌های با دقت قابل قبول انجام می‌گیرد.

در تمامی مراحل آنالیز، شبکهٔ اجزای محدود بدون توجه به مسیر ترک بدون تغییر باقی می‌ماند تا بتوان از مزایای روش اجزای محدود بسط‌یافته استفاده نمود. تا زمانی‌که خطای شبکه از حد قابل‌قبول بیشتر شود و تولید مجدد شبکه انجام گیرد. به‌این‌ترتیب ممکن است در ده مرحله رشد ترک نیاز به دو مرحله تولید مجدد شبکه گردد. شبکهٔ تولیدی جدید بدون نیاز به تطابق با مسیر ترک تولید می‌شود.

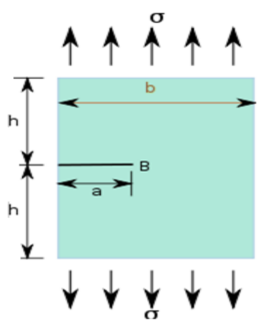
مدل‌سازی عددی

در این بخش برای بیان صحت و کارایی تکنیک

معرفی‌شده دو مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این دو مثال از مسائل کلاسیک مکانیک شکست هستند و ضرایب شدت تنش آن به‌صورت تحلیلی نیز موجود می‌باشد. برای آنالیز اجزای محدود از المان چهارگوش چهارگرهی استفاده شده‌است و انتگرال‌گیری اصلاح شده با چهار نقطهٔ گاوس صورت گرفته‌است. فرایند اصلاح مش نیز براساس معیار ارائه‌شده در بند ۲ صورت گرفته‌است. همچنین خطای هدف در هر دو مسئله برابر ۱۵ درصد درنظر گرفته شده‌است. مثال نخست، مسئلهٔ ترک لبه‌ای تحت کشش و مثال دوم، ترک میانی ٤٥ درجه تحت کشش در نظر گرفته شده‌است. در مثال اول تنها مود اول فعال شده‌است اما مثال دوم مسئلهٔ ترکیب مودها می‌باشد و کارایی این تکنیک را در زمان فعال شدن هر دو مود شکست نشان می‌دهد.

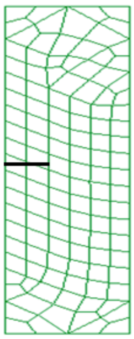
ورق مستطیلی با ترک لبه‌ای

در این مثال یک ورق مستطیلی به‌طول $b = 25cm$ و ارتفاع $2h = 100cm$ مدل‌سازی شده‌است که دارای یک ترک لبه‌ای به‌طول اولیهٔ $a = 8Cm$ می‌باشد (شکل ٤). نمونهٔ موردنظر از دو طرف با تنش یکنواخت $\sigma = 1 \,{}^{kg}/_{cm^2}$ کشیده می‌شود. برای رشد ترک نیز در هر مرحله یک گام رشد ترک به‌طول $2cm$ درنظر گرفته شده‌است. پارامترهای مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون، به‌ترتیب برابر $E = 1000 \,{}^{kg}/_{cm^2}$ و $\nu = 0.3$ می‌باشند.



شکل ٤ ورق مستطیلی با ترک لبه‌ای

برای نشان دادن کارایی تکنیک ارائه‌شده مسئله یک مرتبه تنها با روش اجزای محدود بسط‌یافته و بدون ترکیب با روش تطابقی انجام شده‌است و بار دوم در ترکیب دو روش صورت پذیرفته‌است. شبکهٔ اولیه‌ای که برای آنالیز اجزای محدود بسط‌یافته استفاده شده‌است، در شکل (۵) نشان داده شده‌است. در این شکل مشخص است که ترک از بین المان‌ها عبور کرده‌است.

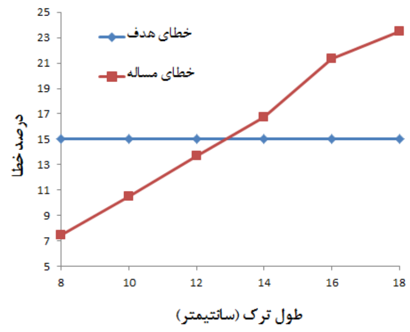

شکل ۵ شبکهٔ اجزای محدود بسط‌یافتهٔ اولیه

معیاری که برای رشد ترک در هر دو فاز درنظر گرفته شده‌است براساس معیار حداکثر تنش محیطی می‌باشد که در آن زاویهٔ انحراف ترک برمبنای ضریب شدت تنش دو مود شکست به‌صورت زیر محاسبه می‌شود[11].

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \qquad (۱۲)$$

تخمین خطا در هر مرحله از رشد ترک صورت گرفته‌است ولی اصلاح شبکه‌ای انجام نشده‌است و درنتیجه با رشد ترک میزان خطا افزایش یافته و از مقدار خطای هدف ۱۵ درصد نیز فراتر رفته‌است که نمودار تغییرات آن در شکل (٦) آورده شده‌است. علت این امر حرکت نقاط حساس مسئله (منطقهٔ اطراف ترک) با رشد ترک می‌باشد. چون منطقهٔ ریزشدهٔ قبلی دیگر با نقاط حساس جدید مسئله منطبق نیستند خطای حل شروع به افزایش می‌نماید که با اصلاح مجدد شبکه این مسئله

برطرف می‌شود.



شکل ٦ تغییرات خطا با رشد ترک بدون اصلاح شبکه

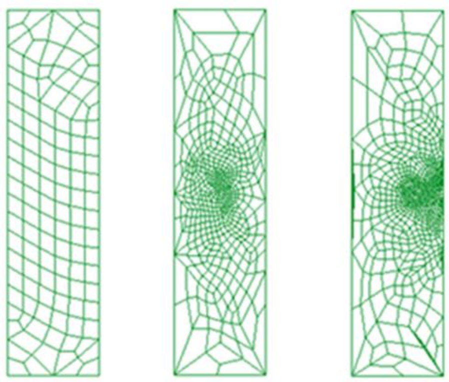
در هر مرحله از رشد ترک مقدار ضریب شدت تنش بااستفاده از روش انتگرال متقابل محاسبه شده و در جدول (۱) آورده شده‌است. همچنین این مقدار با مقدار تحلیلی این مود که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید[11] مقایسه شده‌است.

$$K_I = \alpha\sigma\sqrt{\pi a}$$
$$\alpha = \left[1.12 - 0.23\left(\frac{a}{b}\right) + 10.6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.7\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.4\left(\frac{a}{b}\right)^4\right] \quad (۱۳)$$

بدیهی است که در این مسئله مود دوم فعال نشده‌است و ضریب شدت تنش آن صفر است.

جدول ۱ مقادیر ضرایب شدت تنش بدون ترکیب روش‌ها

مرحله	درصد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	۷,٤۷۲	۸,٦۹۱۳	۷,۵۵	۰,۳٦۵٦	(۹,۹۹ و٤۹,۹۰)
دوم	۱۰,۵۱	۱۱,۷۷۸	۹,۷۳	-۰,۵٤۸۰	(۱۱,۹۹و٤۹,۹۳)
سوم	۱۳,٦۹	۱٦,۲۵۷	۱۳,۲۸	-۰,۲٤۲۵	(۱۳,۹۸و۵۰,۰٤)
چهارم	۱٦,۷٤	۲۲,۹۸۹	۱۸,۲۰	۱,۰٦٤۹	(۱۵,۹۸و٤۹,۹۱)
پنجم	۲۱,۳۷	۳۳,۲۱۹	۳۰,۲۰	٤,٦٦۸۳	(۱۷,۸۵و٤۹,۲۱)
ششم	۲۳,۵۲	٤۷,٦۳۹	۳۲,٦٦	-۳,۱۹۸۵	(۱۹,۸۲و٤۸,۸۸)

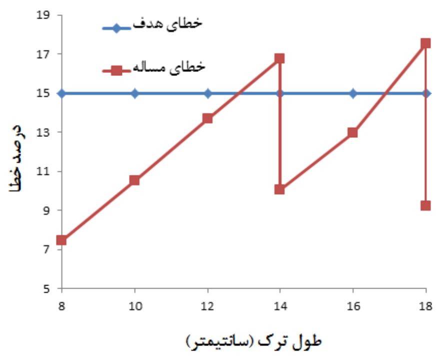


گام ۶ اصلاح یافته   گام ۴ اصلاح یافته تا۶   گام ۱ الی ۴

شکل ۷ شبکهٔ اصلاح‌شده در طول رشد ترک

حال در مرحلهٔ دوم ترکیب روش‌های اجزای محدود بسط‌یافته و تطابقی انجام گرفت و ملاحظه گردید که در دو مرحله از رشد ترک، خطا از حد مجاز ۱۵ درصد فراتر رفت و نیاز به اصلاح شبکه وجود دارد. شبکهٔ اصلاح‌شده در این دو مرحله در شکل (۷) نشان داده شده‌است که تراکم المان‌ها در نوک ترک هرمرحله، نشان می‌دهد روش تطابقی به‌خوبی نقاط حساس مسئله را یافته و شبکهٔ مناسبی تولید کرده‌است.

میزان تغییرات خطا در مراحل مختلف رشد ترک در شکل (۸) آورده شده‌است که ملاحظه می‌شود در مراحلی که خطا بالای خطای هدف است، اصلاح شبکه منجر به افت خطا شده‌است. حال با روش ترکیبی مجددا برآورد ضریب شدت تنش انجام شده‌است که نتایج و مقایسهٔ آن با مقادیر تحلیلی در جدول (۲) نشان داده شده‌است.



شکل ۸ تغییرات خطا با رشد ترک با روش ترکیبی

با مقایسهٔ مقادیر جداول (۱ و ۲) واضح است که استفاده از روش ترکیبی به‌مقدار قابل‌توجهی خطای محاسبه ضرایب شدت تنش را کاهش می‌دهد و مسیر رشد ترک را با دقت بالاتری پیدا می‌کند.

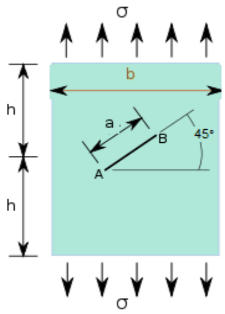
لازم به ذکر است باتوجه به آنالیز خطی مسئله، آنالیز مجدد روی تمامی شبکه‌ها انجام گرفته‌است و نیازی به فرایند انتقال اطلاعات نمی‌باشد.

ورق مربعی با ترک مورب

مدل‌سازی دوم عددی مورد بررسی ترک مورب ۴۵درجه در داخل یک ورق مربعی می‌باشد که تحت کشش قرار دارد. این مسئله به این لحاظ اهمیت دارد که یک مسئلهٔ مود ترکیبی است که هر دو مود در آن فعال می‌شوند و کارایی تکنیک ارائه‌شده در این گونه مسائل را نشان می‌دهد. در این مثال عرض صفحه $b = 50\,cm$ و ارتفاع $2h = 50\,cm$ درنظر گرفته می‌شود. طول اولیهٔ ترک نیز $a = 10\sqrt{2}cm$ می‌باشد. نمونهٔ مورد نظر از دو طرف با تنش یکنواخت برابر $\sigma = 1\,{kg}/{cm^2}$ کشیده می‌شود. برای رشد ترک نیز در هر مرحله یک گام با طول $2cm$ در نظر گرفته شده‌است. سایر پارامترهای مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به‌ترتیب برابر $E = 1000\,{Kg}/{cm^2}$ و $\nu = 0.3$ می‌باشند (شکل ۹).

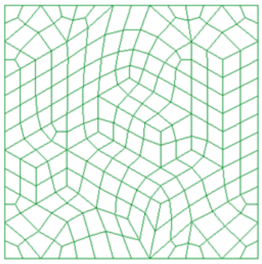
جدول ۲ مقادیر ضرایب شدت تنش با ترکیب روش‌ها

مرحله	درصد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	۷,۴۷	۸,۶۹۱	۷,۵۵۴	۰,۳۶۵	(۹,۹۹و۴۹,۹۰)
دوم	۱۰,۵۱	۱۱,۷۷۸	۹,۷۳۶	-۰,۵۴۸	(۱۱,۹۹و۴۹,۹۳)
سوم	۱۳,۶۹	۱۶,۲۵۷	۱۳,۲۸۶	-۰,۲۴۲	(۱۳,۹۸و۵۰,۰۴)
چهارم	۱۶,۷۴	۲۲,۹۸۹	۱۸,۲۰۸	۱,۰۶۴	-
چهارم اصلاح‌شده	۱۰,۰۲	۲۲,۹۸۹	۲۰,۳۶۳	۰,۵۱۷	(۱۵,۹۸و۵۰,۰۴)
پنجم	۱۲,۹۵	۳۳,۲۳۸	۳۰,۷۳۴	۱,۱۶۸	(۱۷,۹۸و۴۹,۸۹)
ششم	۱۷,۵۵	۴۸,۶۰۰	۳۲,۵۸۵	۶,۱۱۹	-
ششم اصلاح‌شده	۹,۲۰	۴۸,۶۰۰	۴۷,۹۰۱	-۱,۶۲۳	(۱۹,۹۸و۴۹,۸۸)

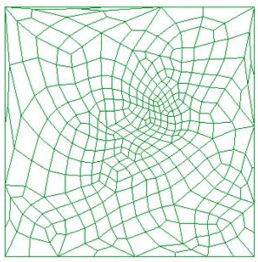


شکل ۹ ورق مربعی با ترک مورب

مطابق مثال قبل این مسئله نیز به دو صورت آنالیز می‌شود؛ بار نخست با اعمال روش اجزای محدود بسط‌یافتهٔ تنها و مرحلهٔ دوم با اعمال روش ترکیبی. از آن‌جایی که مقدار تحلیلی ضریب شدت تنش فقط در مرحلهٔ اول و قبل از رشد ترک موجود می‌باشد لذا برای بیان هم‌گرایی ضریب شدت تنش، گام اول یک بار با مش اولیه و بار دوم با مش اصلاح‌شده حل می‌شود که این دو شبکه در شکل‌های (۱۰ و ۱۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰ شبکهٔ اجزای محدود بسط‌یافتهٔ اولیه



شکل ۱۱ شبکهٔ اجزای محدود بسط‌یافته اصلاح شده

مقادیر ضرایب شدت تنش بااستفاده از هر دو شبکه محاسبه شده‌است و با مقدار تحلیلی آن که از رابطهٔ (۱٤) به‌دست می‌آید [11] مقایسه شده‌است و در جداول (۳ و ٤) آورده شده‌است. باتوجه به وجود دو نوک ترک در مسئله این برآورد برای هر دو نوک ترک ابتدایی و انتهایی انجام شده‌است.

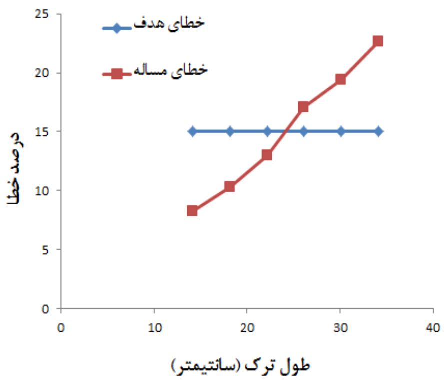
$$K_I = K_{II} = 0.5\sigma\sqrt{\pi a} \quad (۱٤)$$

جدول ۳ مقادیر ضرایب شدت تنش با شبکهٔ اولیه

تحلیلی		نوک ابتدای ترک		نوک انتهای ترک	
KI	KII	KI	KII	KI	KII
۲.۳۵	۲.۳۵	۲.۶۲	۲.۵۶	۲.۷۱	۲.۶۸

جدول ٤ مقادیر ضرایب شدت تنش با شبکهٔ اصلاح‌شده

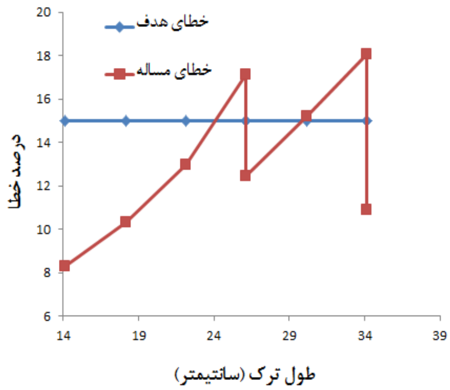
تحلیلی		نوک ابتدای ترک		نوک انتهای ترک	
KI	KII	KI	KII	KI	KII
۲.۳۵	۲.۳۵	۲,٥٤	۲,۳۸	۲,٤۸	۲,٥٦



شکل ۱۲ تغییرات خطا با رشد ترک بدون اصلاح شبکه

نتایج دو جدول حاکی از افزایش دقت پس از اعمال اصلاح شبکه می‌باشد. پس از محاسبهٔ ضرایب شدت تنش فرایند رشد ترک انجام گردید که مشاهده شد ترک از حالت مورب شروع به چرخش به‌صورت مستقیم کرد. فرایند رشد ترک با روش اجزای محدود بسط‌یافته تنها نشان‌دهندهٔ افزایش خطا در مراحل مختلف رشد ترک می‌باشد که در شکل (۱۲) نشان داده شده‌است.

درحالی‌که با ترکیب روش با اجزای محدود تطابقی در دو مرحله (گام‌های ٤ و ٦ رشد ترک) مقدار خطای مسئله در محدودهٔ مجاز نگه داشته شده‌است که در شکل (١٣) نمایش داده شده‌است.



شکل ١٣ تغییرات خطا با رشد ترک با روش ترکیبی

نتیجه‌گیری

روش اجزای محدود بسط‌یافته و روش اجزای محدود تطابقی هر کدام قابلیت‌های بالایی برای حل مسائل آنالیز ترک دارند، ولی درمقابل دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشند. در روش اجزای محدود بسط‌یافته کنترلی برروی میزان خطای مسئله وجود ندارد، و در روش اجزای محدود تطابقی با هر گام از رشد ترک شبکه متناسب با مسیر ترک باید دوباره از ابتدا تشکیل شود. با ترکیب این دو روش می‌توان به‌شدت این مشکلات را کاهش داد. به این صورت که مدل‌سازی هندسهٔ ترک با روش بسط‌یافته انجام شود و ترک از داخل المان‌ها عبور کند و دیگر با رشد ترک شبکه تغییر نکند. ولی در هر گام از مسئله که خطای حل بیش از حد قابل قبول گردد، فرایند اصلاح مش صورت پذیرد. این تولید مجدد شبکه کاملا مستقل از دنبال کردن مسیر ترک است و ممکن است در چند مرحله از رشد ترک، مسئله با یک شبکهٔ یکسان حل شود. نتایج مدل‌سازی‌های عددی نشان دادند که درصورت ترکیب این روش‌ها، خطای حل به‌میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد و برآورد ضرایب شدت تنش با دقت بیشتری انجام خواهد شد. این تکنیک هم در ترک‌های تک‌مود و هم در مودهای ترکیبی قابلیت برآورد دقیق را نشان داده‌است.

مراجع

1. Melenk, JM., Babuška, I, "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", Comp Methods Appl Mech Eng. Vol. 139, No. 1, pp. 289-314, (1996).
2. Mohammadi, S., "Extended Finite Element, Method for Fracture Analysis of Structures", 1st edn. Black well Publishing Ltd. (2008).
3. Sundararajan, N., "Enriched Finite Element Methods: Advances & Applications", Cardiff University. (2011).
4. Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing", Int. *J. Numer. Methods Eng*. Vol. 46, No. 1, pp. 133–150, (1999).
5. Dolbow, J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", Northwestern university, (1999).
6. Babuška, I., Rheinboldt, W.C., "A-posteriori Error estimates for the Finite Element Method", Int. *J. Numer. Methods Eng*. Vol. 12, No. 10, pp. 1597-1615, (1978).

7. Zienkiewicz, O.C., Boroomand, B., Zhu, J.Z., Recovery Procedures in Error Estimation and Adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems. *Comp Methods Appl Mech Eng*. Vol. 176, No. 1, pp. 111-125, (1999).

8. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics", Butterworth-heinemann, (2005).

9. Sih, G., Paris, C.P., Irwin, G.R., "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies", *Int. J. of Fract Mech*. Vol. 1, No. 3, pp. 189-203, (1965).

10. Paulino., GH., Kim, J.H., A New Approach to Compute T-stress in Functionally Graded Materials by means of the Ineraction Integral Method on Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies, *Eng. Fract Mech,* Vol. 71, No. 1, pp. 1907-1950, (2004).

11. Unger, J.F., Eckardt, S., Könke, C., Modelling of Cohesive Crack Growth in Concrete Structures with the Extended Finite Element, *Comp Methods Appl Mech Eng.* Vol. 196, No. 4, pp. 4087-4100, (2007).